5.4 Çözümlü Problemler

(1) $f'(x^2) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}_+$ koşulunu sağlayan $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Zincir kuralı gereğince $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için

$$(f(x^2))' = f'(x^2)(x^2)' = 2xf'(x^2) = 2x\frac{1}{x} = 2$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} f(x^2) &= 2x + c, x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow [x^2 = t \text{ dersek}] \\ &\Rightarrow f(t) = 2\sqrt{t} + c, t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(2)

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1] \quad \text{ise,} \\ x, & x \in (1,+\infty) \quad \text{ise} \end{cases}$$

koşulunu sağlayan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Zincir kuralı gereğince $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için

$$(f(\ln x))' = f'(\ln x)(\ln x)' = \frac{1}{x} f'(\ln x)$$

olduğundan,

$$x \in (0,1] \text{ için } (\mathrm{f}(\ln \mathrm{x}))' = \frac{1}{\mathrm{x}} \Rightarrow \mathrm{f}(\ln \mathrm{x}) = \ln \mathrm{x} + \mathrm{c}_1 \text{ ve}$$

$$x \in (1,\infty) \text{ için } (\mathrm{f}(\ln \mathrm{x}))' = 1 \Rightarrow \mathrm{f}(\ln \mathrm{x}) = \mathrm{x} + \mathrm{c}_2$$

elde ederiz. $F(x) = f(\ln x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında sürekliliğine göre $F(1^-) = F(1^+)$, yani $c_1 = 1 + c_2$ olur. Buradan $c_2 = c$ keyfi bir reel sayı olmak üzere

$$f(t) = \begin{cases} t + 1 + c, & t \leq 0 \quad \text{ise,} \\ e^t + c, & t > 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

bulunur. $\diamond$

(3) $xf'(x^2) + g'(x) = \cos x - 3x^3$, $f(x^2) + g(x) = \sin x - x^4$ koşullarını sağlayan $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Zincir kuralı gereğince $\forall x \neq 0$ için

$$(f(x^2) + g(x))' = 2xf'(x^2) + g'(x) \quad \text{ve}$$

$$(f(x^2) + g(x))' = (\sin x - x^4)' = \cos x - 4x^3$$

olduğundan,

$$\begin{cases} xf'(x^2) + g'(x) = \cos x - 3x^3 \\ 2xf'(x^2) + g'(x) = \cos x - 4x^3 \end{cases}$$

elde ederiz. Buradan,

$$\begin{aligned} xf'(x^2) = -x^3 \quad &\Rightarrow \quad (\frac{1}{2}f(x^2))' = -x^3 \Rightarrow \frac{1}{2}f(x^2) = -\frac{1}{4}x^4 + c \\ &\Rightarrow \quad f(x^2) = -\frac{1}{2}x^4 + c \end{aligned}$$

ve $g(x) = \sin x - x^4 - f(x^2) = \sin x - \frac{x^4}{2} - c$ olur. Buradan,

$$f(t) = -\frac{t^2}{2} + c, t \in \mathbb{R}_+ \mathrm{ve}\, \mathrm{g(t)} = \sin \mathrm{t} - \frac{\mathrm{t}^4}{2} + \mathrm{c},\ \mathrm{t} \in \mathbb{R}$$

bulunur. $\diamond$

(4) $\int x^2 f(x)dx = \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + c, x \in \mathbb{R}_+$
eşitliğini sağlayan $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.
Çözüm: c herhangi sabit bir reel sayı olmak üzere $\frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + c$ ifadesi $x^2 f(x)$ nin $\mathbb{R}_+$ üzerinde bir ilkel fonksiyonu olsun. Bu durumda, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için

$$x^2 f(x) = (\frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + c)' = x^2 \ln x \Rightarrow f(x) = \ln x$$

bulunur. $\diamond$

(5) $\int x^2 e^x dx = (Ax^2 + Bx + D)e^x + c,\ x \in \mathbb{R}_+$
eşitliğini sağlayan A, B, D sayılarını bulunuz.

Çözüm: c herhangi sabit bir reel sayı olmak üzere $(Ax^2+Bx+D)e^x+c$ ifadesi x^2e^x fonksiyonunun $\mathbb{R}_+$ üzerinde bir ilkel fonksiyonu olsun. Bu durumda, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{aligned} x^2e^x &= [(Ax^2+Bx+D)e^x+c]' = [Ax^2+(2A+B)x+B+D]e^x \\ &\Rightarrow x^2 = Ax^2+(2A+B)x+B+D \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ 2A+B=0 \\ B+D=0 \end{cases}$$

elde ederiz. Bu denklem sisteminden $A=1, B=-2, D=2$ olarak bulunur. $\diamond$

(6) $\int x^5 \ln x dx = \frac{x^6}{36}(A\ln x+B)+c$, $x \in \mathbb{R}_+$
eşitliğini sağlayan A, B sayılarını bulunuz.
Çözüm: c herhangi sabit bir reel sayı olmak üzere $\frac{x^6}{36}(A\ln x+B)+c$ ifadesi $x^5\ln x$ fonksiyonunun $\mathbb{R}_+$ üzerinde bir ilkel fonksiyonu olsun. Bu durumda, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{aligned} x^5\ln x &= [\frac{x^6}{36}(A\ln x+B)+c]' = (\frac{A}{6}\ln x+\frac{A+6B}{36})x^5 \\ &\Rightarrow \ln x = \frac{A}{6}\ln x+\frac{A+6B}{36} \\ &\Rightarrow (1-\frac{A}{6})\ln x = \frac{A+6B}{36} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitlik $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için sağlandığından özel olarak $x=1$ ve $x=e$ için

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{A+6B}{36}=0 \\ (1-\frac{A}{6})=0 \end{cases}$$

yani, $A=6, B=-1$ olarak bulunur. $\diamond$

(7) Türevi kendisinin iki katına eşit olan pozitif bir f fonksiyonu için $f(0)=1$ olduğu biliniyor. $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $I \subset \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}_+$ ve $\forall x \in I$ için $f'(x) = 2f(x)$ ifadesi doğru olduğundan,

$$\begin{aligned} f'(x) = 2f(x) \quad &\Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)}dx = 2dx \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int 2dx \\ &\Rightarrow \quad \ln f(x) = 2x + \ln c \Rightarrow f(x) = ce^{2x} \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada,c herhangi sabit bir reel sayıdır. $f(0) = 1$ den $c = 1$ yani $f(x) = e^{2x}$ bulunur. $\diamond$

(8) Türevi kendisine eşit olan negatif bir f fonksiyonu için $f(-1) = -1$ ise $f(0)$ nedir?
Çözüm: $I \subset \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}_-$ ve $\forall x \in I$ için $f'(x) = f(x)$ ifadesi doğru olduğundan, c keyfi sabit pozitif bir sayı olmak üzere $f(x) = -ce^x$ buluruz. $f(-1) = -1$ den $c = e$ yani $f(x) = -e^{x+1}$ bulunur. Burada,$f(0) = -e$ olur. $\diamond$

(9) $x = f(y)$ tersi olan bir fonksiyon ve $y = f^{-1}(x)$ olsun.

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)dy \tag{5.16}$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak aşağıdaki integralleri bulunuz.

(a) $\int \arctan x dx$, $x \in \mathbb{R}$; (b) $\int \log_2 x dx$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Çözüm: $u = f^{-1}(x), dv = dx$ dersek ,$du = (f^{-1}(x))'dx = dy, v = x$ olduğundan, kısmi integrasyon yöntemini uygularsak

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)dy$$

bulunur. Şimdi (5.16)dan faydalanarak (a) ve (b) integrallerini bulalım.
(a) $y = f^{-1}(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = f(y) = \tan y, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ olduğundan, (5.16) ya göre

$$\begin{aligned} \int \arctan x dx &= x \arctan x - \int \tan y dy \\ &= x \arctan x - \ln \cos y + c \end{aligned}$$

$[\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ olduğundan,] $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$ bulunur.

(b) $y = f^{-1}(x) = \log_2 x,\ x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x = f(y) = 2^y, y \in \mathbb{R}$ olduğundan, (5.16) ya göre

$$\begin{aligned} \int \log_2 x dx &= x \log_2 x - \int 2^y dy = x \log_2 x - \frac{2^y}{\ln 2} + c \\ &= x \log_2 x - \frac{x}{\ln 2} + c \end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(10) f kesin monoton sürekli bir fonksiyon ve f^{-1} onun tersi olsun.

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - \int xd(f^{-1}(x)) \tag{5.17}$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak aşağıdaki integralleri bulunuz.

(a) $\int \arcsin x dx,\ x \in [-1,1]$; (b) $\int \ln x dx,\ x \in \mathbb{R}_+$.

Çözüm: $u = f^{-1}(x), dv = dx$ dersek ,$du = d(f^{-1}(x)), v = x$ olduğundan, kısmi integrasyon yöntemini uygularsak

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - \int xd(f^{-1}(x))$$

olduğu elde edilir.

$y = f^{-1}(x) = \arcsin x,\ x \in [-1,1] \Rightarrow x = f(y) = \sin y, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ olduğundan, (5.17) ye göre

$$\begin{aligned} \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int xd(\arcsin x) \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c,\ x \in [-1,1] \end{aligned}$$

bulunur.

$y = f^{-1}(x) = \ln x,\ x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x = f(y) = e^y, y \in \mathbb{R}$ olduğundan, (5.17) ye göre

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int xd(\ln x) = x \ln x - x + c,\ x \in \mathbb{R}_+$$

bulunur. $\diamond$

(11) Aşağıdaki integralleri bulunuz.

(a) $I_1 = \int \frac{dx}{1+\sin x}, x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (b) $I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}_+$;

(c) $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; (d) $I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}, x \in \mathbb{R}\backslash[0,1]$;

(e) $I_5 = \int \frac{dx}{\sinh x}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; (f) $I_6 = \int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}} dx$;

(h) $I_7 = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$; (i) $I_8 = \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

Çözüm: (a) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ için

$$\frac{dx}{1+\sin x} = \frac{-d(\frac{\pi}{2} - x)}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - x)} = -\frac{d(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int \frac{d(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} \; [y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \text{dersek}] \\ &= -\int \frac{dy}{\cos^2 y} = -\tan y + c = -\tan\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\Big) + c \end{aligned}$$

bulunur.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{dx}{x \mid x \mid \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{\text{sgn} x dx}{x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{d(\frac{1}{|x|})}{\sqrt{1 + (\frac{1}{|x|})^2}}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int \frac{d(\frac{1}{|x|})}{\sqrt{1 + (\frac{1}{|x|})^2}} \; [y = \frac{1}{\mid x \mid} \text{dersek}] \\ &= -\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = -\ln(y + \sqrt{1+y^2}) + c \\ &= -\ln \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{\mid x \mid} + c \end{aligned}$$

bulunur.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{\mid x \mid^3 (1 + \frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\text{sgn} x}{2}(1 + \frac{1}{x^2})^{-\frac{3}{2}} d(1 + \frac{1}{x^2})$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{\text{sgn}x}{2}\int (1+\frac{1}{x^2})^{-\frac{3}{2}} d(1+\frac{1}{x^2})[y=1+\frac{1}{x^2}\text{dersek}] \\ &= -\frac{\text{sgn}x}{2}\int y^{-\frac{3}{2}}dy = \frac{\text{sgn}x}{2}2y^{-\frac{1}{2}}+c \\ &= \frac{x}{1+x^2}+c, x\in\mathbb{R}\backslash\{0\} \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\frac{x}{1+x^2}+c$ ifadesinin $\mathbb{R}$ üzerinde $(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğu açıktır.

(d) $\forall x > 0$ için

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = 2\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} I_4 &= 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}\ [y=\sqrt{x}\text{dersek}] \\ &= 2\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = 2\ln(y+\sqrt{1+y^2})+c \\ &= 2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+c \end{aligned}$$

ve $\forall x < -1$ için

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \frac{dx}{\sqrt{-x}\sqrt{-1-x}} = -2\frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{1+(\sqrt{-x-1})^2}}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} I_4 &= -2\int \frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{1+(\sqrt{-x-1})^2}}[y=\sqrt{-x-1}\text{dersek}] \\ &= -2\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = -2\ln(y+\sqrt{1+y^2})+c \\ &= -2\ln(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x})+c \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre,

$$I_4 = 2\text{sgn}x \ln\left(\sqrt{\mid x \mid} + \sqrt{\mid 1+x \mid}\right),\ x \in \mathbb{R}\backslash[-1,0]$$

olur.

(e) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$\frac{dx}{\sinh x} = \frac{dx}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \frac{d(\tanh\frac{x}{2})}{\tanh\frac{x}{2}}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \frac{d(\tanh\frac{x}{2})}{\tanh\frac{x}{2}}\ [y = \tanh\frac{x}{2}\text{dersek}] \\ &= \int \frac{dy}{y} = \ln\mid y\mid + c = \ln\mid\tanh\frac{x}{2}\mid + c \end{aligned}$$

bulunur.

(f) $\frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d(\sqrt{2}\cosh x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\cosh x)^2-1}}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\cosh x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\cosh x)^2-1}}[y = \sqrt{2}\cosh x\text{dersek}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)+c \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\cosh x + \sqrt{\cosh 2x}\right) + c \end{aligned}$$

bulunur.

(g) $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi), k \in \mathbb{Z}$ için

$$\frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \frac{dx}{(\tan^2 x + 2)\cos^2 x} = \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x + 2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} I_7 &= \int\frac{d(\tan x)}{\tan^2 x + 2}\ [y = \tan x\text{dersek}] \\ &= \int \frac{dy}{y^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{y}{\sqrt{2}} + c_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + c_k, x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi), k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

bulunur. İlkel fonksiyonun sürekliliğinden

$$I_7[(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-] = I_7[(\frac{\pi}{2}+k\pi)^+], k\in\mathbb{Z}$$

yani $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+c_k = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+c_{k+1}, k\in\mathbb{Z}$ elde edilir. Buradan, $c_{k+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}+c_k$ veya $c_k=\frac{k\pi}{\sqrt{2}}+c_0, k\in\mathbb{Z}$ olur. $k<\frac{2x+\pi}{2\pi}<k+1, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k=\llbracket\frac{2x+\pi}{2\pi}\rrbracket$ olduğundan,

$$I_7(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\llbracket\frac{2x+\pi}{2\pi}\rrbracket+c, & x\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\text{ ise,}\\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} I_7(x), & x=\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\text{ ise}\end{cases}$$

bulunur.

(h) $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$\frac{x^2+1}{x^4+1}=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} I_8 &= \int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}\ [y=x-\frac{1}{x}\text{dersek}]\\ &= \int\frac{dy}{y^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{y}{\sqrt{2}}+c\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+\begin{cases}c_{-1}, & x<0 \quad\text{ise,}\\ c_1, & x>0\quad\text{ise}\end{cases}$$

bulunur. İlkel fonksiyonun sürekliliğinden $I_8(0^-)=I_8(0^+)$ yani $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+c_{-1}=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+c_1$ elde ederiz. c keyfi bir sabit reel sayı olmak üzere $c_{-1}=-\frac{\pi}{\sqrt{2}}+c,\ c_1=\frac{\pi}{\sqrt{2}}+c$ olduğundan, $I_8(0)=c$ dersek

$$I_8(0^-)=I_8(0^+)=I_8(0)$$

sağlandığından,

$$I_8(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\text{sgn}x+c, & x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\text{ ise,}\\ \lim\limits_{x\to0} I_8(x), & x=0\text{ ise}\end{cases}$$

bulunur. ◇

(12) Aşağıdaki integralleri bulunuz.

(a) $I_1 = \int \frac{dx}{3x^2-2x-1}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{3}, 1\};$

(b) $I_2 = \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx, \quad x \in \mathbb{R};$

(c) $I_3 = \int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}, \quad x \in (\frac{1-\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2});$

(d) $I_4 = \int \sqrt{2+x-x^2} dx, \quad x \in [-1, 2];$

(e) $I_5 = \int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}} dx, \quad x \in (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})\backslash\{0\};$

(f) $I_6 = \int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

Çözüm: (a) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{3}, 1\}$ için

$$\frac{dx}{3x^2-2x-1} = \frac{1}{3} \frac{d(x-\frac{1}{3})}{(x-\frac{1}{3})^2 - \frac{4}{9}}$$

olduğundan, (5.2.1(h) dan)

$$I_1 = \int \frac{1}{3} \frac{d(x-\frac{1}{3})}{(x-\frac{1}{3})^2 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{3x+1} \right| + c, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{3}, 1\}$$

bulunur.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \frac{d[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int \frac{d[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c \end{aligned}$$

bulunur.

(c) $\forall x \in (\frac{1-\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2})$ için

$$\frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}} = -\frac{d(5+x-x^2)}{2\sqrt{5+x-x^2}} + \frac{1}{2} \frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{21}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{1}{2}\int \frac{d(5+x-x^2)}{\sqrt{5+x-x^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{21}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} \\ &= -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}} + c,\ x \in (\frac{1-\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2}) \end{aligned}$$

bulunur.

(d) $\forall x \in [-1, 2]$ için

$$\sqrt{2+x-x^2}dx = \sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}d(x-\frac{1}{2})$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}d(x-\frac{1}{2})[5.2.4(\text{g})\text{den}] \\ &= \frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3} + c, x \in [-1, 2] \end{aligned}$$

bulunur.

(e) $\forall x \in (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})\backslash\{0\}$ için

$$\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx = \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} + \frac{x-1}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$$

olduğundan,

$$I_5 = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} + \int \frac{x-1}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$$

olduğu açıktır. Birinci integralde $t = \frac{1}{|x|}$ değişken değiştirmesi yapıldığında,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} &= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t\text{sgn}x-1}} \\ &= -\ln\left|t+\frac{\text{sgn}x}{2}+\sqrt{t^2+t\text{sgn}x-1}\right| \\ &= -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| \end{aligned}$$

bulunur. İkinci integral için

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{1+x-x^2}} &= -\frac{1}{2}\int \frac{d(1+x-x^2)}{\sqrt{1+x-x^2}} - \frac{1}{2}\frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\\ &= -\sqrt{1+x-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

olduğundan,

$$I_5 = -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| - \sqrt{1+x-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + c$$

bulunur.

(f) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$\begin{aligned}\frac{dx}{1+x^4+x^8} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} + \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+3} - \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-3}\right)\end{aligned}$$

olduğundan,

$$I_6 = \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+3} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-3}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right| + \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}x\right) + c, & x \neq 0 \text{ ise},\\ c, & x = 0 \text{ ise}\end{cases}$$

bulunur. $\diamond$

(13) $a \neq 0$ ve $P_n(x), n.$ dereceden bir polinom olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\int P_n(x)e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right) + c$

(b)

$$\begin{aligned}\int P_n(x)\sin ax dx &= -\frac{\cos ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right)\\ &= +\frac{\sin ax}{a}\left(P'(x) - \frac{P^{(3)}(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \cdots\right) + c\end{aligned}$$

(c)

$$\int P_n(x)\cos ax dx = \frac{\sin ax}{a}\Big(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\Big)$$
$$= +\frac{\cos ax}{a}\Big(P'(x) - \frac{P^{(3)}(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \cdots\Big) + c$$

Çözüm: (a) $u = P_n(x), dv = e^{ax}dx$ dersek $du = P'_n(x)dx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$olacağından, kısmi integrasyon yöntemi gereğince

$$\int P_n(x)e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}P_n(x) - \frac{1}{a}\int e^{ax}P'_n(x)dx$$

elde edilir. Son integralde, yeniden kısmi integrasyon yönteminden yararlanarak
$u = P'_n(x), dv = e^{ax}dx$ dersek $du = P''_n(x)dx, v = \frac{1}{a}e^{ax}$

$$\int P_n(x)e^{ax}dx = e^{ax}\Big(\frac{P_n(x)}{a} - \frac{P'_n(x)}{a^2}\Big) + \frac{1}{a^2}\int e^{ax}P''_n(x)dx$$

bulunur.

Matematik İndüksiyon yöntemi ile herhangi $k \leq n$ doğal sayısı için

$$\int P_n(x)e^{ax}dx = e^{ax}\Big(\frac{P_n(x)}{a} - \frac{P'_n(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^k\frac{P^{(k)}{}_n(x)}{a^{k+1}}\Big)$$
$$+ (-1)^{k+1}\frac{1}{k+1}\int e^{ax}P^{(k+1)}{}_n(x)dx$$

bulunur. $k = n$ için $P^{(n+1)}{}_n(x) \equiv 0$ olduğundan, son eşitlikten istenen (a) bağıntısının doğru olduğu anlaşılır.

Şimdi (b) ve (c) bağıntılarının doğruluğunu gösterelim. (a) bağıntısında $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere a yerine ia yazılırsa

$$\int P_n(x)e^{iax}dx = e^{iax}\Big(-i\frac{P_n(x)}{a} + \frac{P'_n(x)}{a^2} + i\frac{P''_n(x)}{a^3} + \cdots\Big)$$

elde edilir. $e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$ olduğundan, son eşitliğin reel ve sanal kısımlarını eşitlersek (b) ve (c) bağıntılarının doğru olduğu anlaşılır. $\diamond$

(14) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki integraller için indirgeme formülleri bulunuz.

(a) $I_n = \int x^\alpha \ln^n x\, dx,\ \alpha \neq -1,\ x \in \mathbb{R};$ (b) $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a}}\, dx,\ n > 2;$

(c) $I_n = \int \sin^n x\, dx,\ n > 2;$ (d) $I_n = \int \sinh^n x\, dx,\ n > 2;$

(e) $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x},\ n > 1,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$ (f) $I_n = \int \frac{dx}{\cosh^n x},\ n > 1.$

Çözüm: (a) $u = \ln^n x$, $dv = x^\alpha dx$ dersek, $du = \frac{n}{x}\ln^{n-1} x dx, v = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ olduğundan, kısmi integrasyon formülü gereğince

$$I_n = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln^n x - \frac{n}{\alpha+1}\int x^\alpha \ln^{n-1} x\, dx$$

bulunur. O halde, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için

$$I_n = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln^n x - \frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

olur.

(b) $u = x^{n-1}, dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{2}\frac{d(x^2+a)}{\sqrt{x^2+a}}$ dersek $du = (n-1)x^{n-2}dx$, $v = \sqrt{x^2+a}$ olduğundan, kısmi integrasyon formülü gereğince

$$\begin{aligned} I_n &= x^{n-1}\sqrt{x^2+a} - (n-1)\int x^{n-2}\sqrt{x^2+a}\, dx \\ &= x^{n-1}\sqrt{x^2+a} - (n-1)\int \frac{x^{n-2}(x^2+a)}{\sqrt{x^2+a}}\, dx \\ &= x^{n-1}\sqrt{x^2+a} - (n-1)I_n - a(n-1)I_{n-2} \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$I_n = \frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{x^2+a} - \frac{n-1}{n}aI_{n-2}, \quad n = 3, 4, \cdots$$

bulunur.

(c) $u = \sin^{n-1} x, dv = \sin x dx = -d(cosx)$ dersek, $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, v = -\cos x$ olduğundan, kısmi integrasyon yöntemi gereğince

$$\begin{aligned} I_n &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}, \;\; n = 3, 4, \cdots$$

bulunur.

(d) $u = \sinh^{n-1}x, dv = \sinh x dx = d(\cosh x)$ dersek, $du = (n-1)\sinh^{n-2}x\cosh x\, dx, v = \cosh x$ olduğundan, kısmi integrasyon yöntemi gereğince

$$\begin{aligned} I_n &= \sinh^{n-1}x\cosh x - (n-1)\int \sinh^{n-2}x\cosh^2 x\, dx \\ &= \sinh^{n-1}x\cosh x - (n-1)I_{n-1} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$I_n = \frac{1}{n}\sinh^{n-1}x\cosh x - \frac{n-1}{n}I_{n-2}, n = 3, 4, \cdots$$

bulunur.

(e) $u = \frac{1}{\cos^{n-2}x}, dv = \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x)$ dersek, $du = \frac{(n-2)\sin x}{\cos^{n-1}x}\, dx$, $v = \tan x$ olduğundan, kısmi integrasyon yöntemi gereğince

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1}{\cos^{n-2}x}\frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2}x} - (n-2)\int \frac{\sin x \tan x}{\cos^{n-1}x}\, dx \\ &= \frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} - (n-2)\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x}\, dx \\ &= \frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2} \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$I_n = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}, n = 2, 3, \cdots$$

bulunur.

(f) $u = \frac{1}{\cosh^{n-2}x}, dv = \frac{dx}{\cosh^2 x}$ dersek kısmi integrasyon yöntemi gereğince (e) ye benzer olarak

$$I_n = \frac{1}{n-1}\frac{\sinh x}{\cosh^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}, \quad n = 2, 3, \cdots$$

bulunur. $\diamond$

(15) $I_n = \int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}, a^2+b^2>0, n>2$ integrali için indirgeme formülü bulunuz. Elde edilen formülden yaralanarak

$$\mathbf{J}_1 = \int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}$$

integralini bulunuz.

Çözüm: Kısmi integrasyon yöntemi gereğince ($u = \frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}$, $dv = d(-a\cos x + b\sin x) \Rightarrow du = \frac{-(n+1)(a\cos x - b\sin x)}{(a\sin x+b\cos x)^{n+2}}$, $v = b\sin x - a\cos x$ denirse)

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{d(-a\cos x + b\sin x)}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} \\
&= \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} - (n+1)\int \frac{(a\cos x - b\sin x)^2}{(a\sin x + b\cos x)^{n+2}}\,dx \\
&= \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} \\
&- (n+1)\int \frac{(a\cos x - b\sin x)^2 + (a\sin x + b\cos x)^2}{(a\sin x + b\cos x)^{n+2}}\,dx \\
&+ (n+1)\int \frac{(a\sin x + b\cos x)^2}{(a\sin x + b\cos x)^{n+2}}\,dx \\
&= \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} - (n+1)(a^2+b^2)I_{n+2} + (n+1)I_n
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan,

$$(n+1)(a^2+b^2)I_{n+2} = nI_n + \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}}$$

veya

$$I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(a^2+b^2)}[nI_n + \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}}]$$

bulunur. Son bağıntıda n yerine $n-2$ yazılırsa

$$I_n = \frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}[(n-2)I_{n-2} + \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}}],\ n = 3, 4, \cdots$$

biçiminde de yazabiliriz. Bu bağıntıdan faydalanarak $\mathbf{J}_1$ integralini hesaplayalım.

$$\mathbf{J}_1 = \int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}$$

[yukarıdaki formülde $a = 1,\ b = 2,\ n = 3$ olduğundan]

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10}\Big[\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)} + \frac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\Big] \\ &= \frac{1}{10}\Big[\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\Big|\tan\Big(\frac{x + \arctan 2}{2}\Big)\Big| + \frac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\Big] + c \end{aligned}$$

$x \neq k\pi + \arctan 2, k \in Z$ bulunur. $\diamond$

(16) $I_n = \int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$ integralinin bir rasyonel fonksiyon olması için $a,\ b$ ve c ne olmalıdır?

Çözüm: I_n integralinin bir rasyonel fonksiyon olması için;

$$\frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} = \frac{D_1}{x} + \frac{D_2}{x^2} + \frac{D_3}{x^3} + \frac{D_4}{x-1} + \frac{D_5}{(x-1)^2} \qquad (5.18)$$

ayrılışında D_1 ve D_4 katsayıları sıfır olmalıdır. $D_1 = D_4 = 0$ olduğunu kabul edip (5.18) den

$$ax^2 + bx + c = D_3(x^2 - 2x + 1) + D_2(x^3 - 2x^2 + x) + D_5x^3$$

elde ederiz.Her iki tarafta x'in aynı kuvvetlerinin katsayılarını birbirine eşitleyip

$$\begin{aligned} x^0 : c &= D_3 \\ x^1 : b &= -2D_3 + D_2 \\ x^2 : a &= D_3 - 2D_2 \\ x^3 : 0 &= D_2 + D_5 \end{aligned}$$

denklem sistemi buluruz. Sistemi çözüp $D_2 = b + 2c,\ D_3 = a + 2b + 4c,\ D_5 = -b - 2c$ bulur ve (5.18) den

$$\frac{D_1}{x} + \frac{D_4}{x-1} = \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} - \frac{b+2c}{x^2} - \frac{a+2b+4c}{x^3} + \frac{b+2c}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow D_1x^2(x-1)^2+D_4x^3(x-1) &\equiv ax^2+bx+c-(b+2c)x(x-1)^2\\ &- (a+2b+4c)(x-1)^2+(b+2c)x^3\end{aligned}$$

elde ederiz. Son eşitlik herhangi x için sağlandığından $x=0$ yazıp $c-(a+2b+4c)=0$ veya $a+2b+3c=0$ buluruz. Demek ki, I integralinin bir rasyonel fonksiyon olması için a, b, c sayıları için $a+2b+3c=0$ koşulu sağlanmalıdır. $\diamond$

(17) $$\sin(\alpha-\beta)=\sin((x+\alpha)-(x+\beta))$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos((x+\alpha)-(x+\beta))$$

bağıntılarından faydalanarak aşağıdaki integralleri bulunuz.

(a) $I_1=\int\dfrac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$; (c) $I_3=\int\tan x\tan(x+a)\,dx$.

(b) $I_2=\int\dfrac{dx}{\sin x-\sin a}$;

Çözüm: (a) $I_1=\frac{1}{\sin(b-a)}\int\frac{\sin((x+a)-(x+b))}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\,dx$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sin(b-a)}\left(\int\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}\,dx-\int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\,dx\right.\\ &= \frac{1}{\sin(b-a)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\sin(x+a)}\right|+c,\quad \sin(a-b)\neq 0\end{aligned}$$

bulunur.

(b) $\cos a=\cos(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2})$ eşitliğinden (a)' ya benzer şekilde

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\cos a}\int\frac{\cos(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2})}{\sin(\frac{x-a}{2})\cos(\frac{x+a}{2})}\,dx\\ &= \frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{\sin(\frac{x+a}{2})}\right|+c,\cos a\neq 0,\sin x\neq\sin a,\end{aligned}$$

bulunur.

$$
\begin{aligned}
(c) \qquad I_3 &= \int (1+\tan x \tan(x+a)-1)\,dx \\
&= \int (\frac{\cos x\cos(x+a)+\sin x\sin(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}-1)\,dx \\
&= \int \frac{\cos a}{\cos x\cos(x+a)}\,dx - x \\
&= -x+\cot a \ln \mid \frac{\cos x}{\cos(x+a)} \mid +c, \\
&\sin x\neq 0, \cos x\neq 0, \cos(x+a)\neq 0
\end{aligned}
$$

bulunur. $\diamond$

(18) $I=\int e^{|x|}\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $x\geq 0$ için $\mathbf{I}(\mathbf{x})=\int e^x\,dx = e^x+c_1,\ x<0$ için $\mathbf{I}(\mathbf{x})=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}+c_2$ bulunur. İlkel fonksiyon sürekli olduğundan, $I(0^-)=I(0^+)$, yani $-1+c_2=1+c_1$ veya $c_2=2+c_1$ elde ederiz. Buradan,

$$
I=\begin{cases} e^x+c, & x\geq 0 \text{ ise}, \\ e^{-x}+2+c, & x<0 \text{ ise} \end{cases}
$$

bulunur. $\diamond$

(19) $x\in\mathbb{R}$ sayısı ile bu sayıya en yakın tam sayıdan uzaklığı $g(x)$ olmak üzere $I=\int g(x)\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\forall n\in\mathbb{Z}$ ve $\forall x\in[n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})$için $g(x)=\mid x-n\mid$ olduğundan, her $x\in[n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})$ için

$$
I(x)=\int g(x)\,dx=\int \mid x-n\mid\ dx=\frac{1}{2}(x-n)\mid x-n\mid +c_n,
$$

bulunur. İlkel fonksiyonun sürekliliğinden $I[(n+\frac{1}{2})^-]=I[(n+\frac{1}{2})^+]$, yani $\frac{1}{8}+c_n=-\frac{1}{8}+c_{n+1}$ veya $c_{n+1}=c_n+\frac{1}{4}, n\in\mathbb{Z}$ elde ederiz. Buradan, $c=c_0$ keyfi bir reel sayı olmak üzere $c_n=\frac{n}{4}+c, n\in\mathbb{Z}$ yazabiliriz. Öte yandan, $\forall x\in[n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})(n\in\mathbb{Z})$ için $n=\ [\![\ x+\frac{1}{2}\ ]\!]\ $ olduğundan,

$I(x) = \frac{1}{2}(x - [\![x + \frac{1}{2}]\!])|x - [\![x + \frac{1}{2}]\!]| + \frac{1}{4}x - [\![x + \frac{1}{2}]\!] + c, x \in [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ bulunur. $\diamond$

(20) $I_x = \int [\![x]\!] \mid \sin \pi x \mid dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\forall n \in \mathbb{Z} \forall x \in [n, n+1)$ için $[\![x]\!] = n$ ve $| \sin \pi x | = (-1)^n \sin \pi x$ olduğundan,

$$I(x) = (-1)^n n \int \sin \pi x \, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} n \cos \pi x + c_n, \ x \in [n, n+1), \ n \in \mathbb{Z}$$

elde ederiz. İlkel fonksiyonun sürekliliğinden $I[(n+1)^-] = I[(n+1)^+]$, yani $\frac{n}{\pi} + c_n = -\frac{n+1}{\pi} + c_{n+1}$ veya $c_{n+1} = c_n + \frac{2n+1}{\pi}$ olur. Buradan, $c = c_0$ keyfi bir reel sayı olmak üzere $c_n = \frac{n^2}{\pi} + c, n \in \mathbb{Z}$ yazabiliriz. Öte yandan, $\forall x \in [n, n+1) (n \in \mathbb{Z})$ için $[\![x]\!] = n$ olduğundan,

$$I(x) = \frac{[\![x]\!]}{\pi} ([\![x]\!] - (-1)^{[\![x]\!]} \cos \pi x) + c, \ x \in [n, n+1), \ n \in \mathbb{Z}$$

bulunur. $\diamond$

(21) $f(x) = \max(1; x^2), x \in \mathbb{R}$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$f(x) = \max\{1; x^2\} = \begin{cases} 1, & | x | \leq 1 \text{ ise}, \\ x^2, & | x | > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğundan, $| x | \leq 1$ için

$$I(x) = \int f(x) \, dx = \int dx = x + c_1,$$

$| x | > 1$ için

$$I(x) = \int f(x) \, dx = \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + c_2$$

buluruz. İlkel fonksiyonun sürekliliğinden, $x = -1$ noktasında; $I(-1^-) = I(-1^+)$, yani $\frac{-1}{3} + c_2 = -1 + c_1 \rightarrow c_2 = \frac{-2}{3} + c_1$, $x = 1$ noktasında;

$I(1^-) = I(1^+)$, yani$\frac{1}{3} + c_2 = -1 + c_1 \rightarrow c_2 = \frac{2}{3} + c_1$, elde ederiz. Buradan, c keyfi bir reel sayı olmak üzere,

$$I(x) = \begin{cases} x + c, & |x| \leq 1 \text{ ise}, \\ \frac{x^3 + 2\mathrm{sgn}x}{3} + c, & |x| > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur. ◇

5.5 Ek Problemler

(22) Aşağıdaki fonksiyonların ilkel fonksiyonlarını bulunuz.

(a) $x \mid x \mid, \quad x \in \mathbb{R}$; (b) $\mid 1 + x \mid - \mid 1 - x \mid, \ x \in \mathbb{R}$;
(c) $(2x - 3) \mid x - 2 \mid, \ x \in \mathbb{R}$; (d) $e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$;
(e) $\mid \sinh x \mid, \quad x \in \mathbb{R}$; (f) $\max\{1; x^4\}, \quad x \in \mathbb{R}$;

(g) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1 \text{ ise}, \\ 1 - |x|, & |x| > 1 \text{ ise} \end{cases}$

Cevap: (a) $I(x) = \frac{|x|^3}{3} + c$; (b) $I(x) = \frac{(1+x)|1+x|}{2} + \frac{(1-x)|1-x|}{2} + c$;

(c) $I(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + c, & x < 2 \text{ ise}, \\ \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x - \frac{20}{3} + c, & x \geq 2 \text{ ise}; \end{cases}$

(d) $I(x) = \begin{cases} e^x + c, & x < 0 \text{ ise}, \\ -e^{-x} + 2 + c, & x \geq 0 \text{ ise}; \end{cases}$

(e) $I(x) = \begin{cases} 1 - \cosh x + c, & x < 0 \text{ ise}, \\ \cosh x - 1 + c, & x \geq 0 \text{ ise}; \end{cases}$

(f) $I(x) = \begin{cases} x + c, & |x| \leq 1 \text{ ise}, \\ \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{5}\mathrm{sgn}x + c, & |x| > 1 \text{ ise}; \end{cases}$

(g) $I(x) = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + c, & |x| \leq 1 \text{ ise}, \\ x - \frac{1}{2}x \mid x \mid + \frac{1}{6}\mathrm{sgn}x + c, & |x| > 1 \text{ ise} . \end{cases}$

(23) Aşağıdaki integralleri bulunuz.

(a) $\int (x+2)^3(3x-5)\,dx$, (b) $\int \frac{x^4-6x^2+3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-1}{x\sqrt{x}}\,dx$;
(c) $\int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx$; (d) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\,dx$;
(e) $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}\,dx$; (f) $\int (2+3x)^{14}\,dx$;
(g) $\int \sin(5x-2)\,dx$; (h) $\int e^x(2^x+3^x)\,dx$;
(i) $\int \cot^2 x\,dx$; (j) $\int \tanh^2 7x\,dx$;

Cevap: (a) $\frac{3}{5}x^5+\frac{13}{4}x^4+2x^3-18x^2-40x+c$;
(b) $\frac{2}{7}x\sqrt[3]{x}-4x\sqrt{x}+3\ln x-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}+c, \quad x\in\mathbb{R}_+$;
(c) $\arcsin\frac{x}{2}+2\ln(x+\sqrt{4+x^2})+c$;
(d) $-\frac{1}{5^x\ln 5}-\frac{1}{2^x\ln 2}+c$;
(e) $\frac{9}{2}x^2+\frac{11}{2}\ln\mid x-2\mid+\frac{3}{2}\ln\mid x+2\mid+c, x\neq\pm 2$;
(f) $\frac{1}{15}(2+3x)^{15}+c$;
(g) $-\frac{1}{5}\cos(5x-2)+c$;
(h) $e^x(\frac{2^x}{1+\ln 2}+\frac{3^x}{1+\ln 3})+c$;
(i) $-\cot x-x+c,\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;
(j) $x-\frac{1}{7}\tanh 7x+c$.

(24) $x\in\mathbb{R}_+$ için

(a) $\begin{cases} f(x)+g(x)=x+1\ , \\ f'(x)-g'(x)=0\ , \\ f'(2x)+g'(-2x)=1-12x^2\ ; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} f(x)+g(x)=\frac{1}{6}x^4\ , \\ f'(x)-g'(x)=\sin x\ , \\ f'(2x)+g'(-2x)=0\ ; \end{cases}$

koşullarını sağlayan $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Cevap: (a) $f(t)=\frac{1}{2}t+1-c,\ \ g(t)=\begin{cases}\frac{t}{2}+c, & x>0 \text{ ise},\\ \frac{t}{2}-t^3+c, & t\leq 0 \text{ ise;}\end{cases}$

(b) $f(t)=\frac{t^4}{12}-\frac{\cos t}{2}+c,\ \ g(t)=\begin{cases}\frac{t^4}{12}+\frac{\cos t}{2}-c, & x>0 \text{ ise},\\ \frac{t^4}{12}-\frac{\cos t}{2}+1-c, & t\leq 0 \text{ ise.}\end{cases}$

(25) Kısmi integrasyon yöntemini kullanarak aşağıdaki integralleri bulunuz.

(a)	$\int \frac{3+2x^2}{1+x^2} \arctan x \, dx$;	(b)	$\int x \arccos \frac{1}{x} \, dx$;
(c)	$\int x \ln(x + \frac{1}{x}) \, dx$;	(d)	$\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx$;
(e)	$\int x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2 \, dx$;	(f)	$\int e^{3x}(x^2 - 6x + 2) \, dx$;
(g)	$\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$;	(h)	$\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} \, dx$;
(i)	$\int e^{-x} \mathrm{arccote^x} \, \mathrm{dx}$;	(j)	$\int \frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{1+x}} \, dx$;
(k)	$\int \arcsin^2 x \, dx$;	(l)	$\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} \, dx$.

Cevap: (a) $2x \arctan x - \ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} \arctan^2 x + c$;

(b) $\frac{x^2}{2} \arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1}\mathrm{sgn}x + c$;

(c) $\frac{x^2}{2} \ln(1 + \frac{1}{x}) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln \mid 1 + x \mid + c$;

(d) $-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sin^2 x} + \cot x) + c$; (e) $(\frac{2}{5} \ln^2 x - \frac{8}{5} \ln x + \frac{16}{125})x^{\frac{5}{2}} + c$;

(f) $e^{3x}(\frac{x^2}{3} - \frac{20}{9}x + \frac{38}{27}) + c$; (g) $-\sqrt{1 - x^2} \arccos x - x + c$;

(h) $2\sqrt{x + 1} \arctan \sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x + 1}) + c$;

(i) $-x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) - e^{-x} \mathrm{arccot} e^x + c$;

(j) $2\sqrt{x + 1}(\ln(x^2 - 1) - 4) - 4\sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x-1} + c$;

(k) $x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x + c$;

(l) $\frac{1}{8}x(2x^2 + a^2)\sqrt{a^2 - 1 + x^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + c$.

(26) Değişken değiştirme yöntemini kullanarak aşağıdaki integralleri bulunuz.

(a)	$\int \cos^6 x \, dx$;	(b)	$\int \sin^4 x \, dx$;	(c)	$\int \frac{dx}{\cos^3 x}$;
(d)	$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$;	(e)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$;	(f)	$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1 + x^2}}$;
(g)	$\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}$;	(h)	$\int \ln \frac{1 + x}{1 - x} \frac{dx}{x^2 - 1}$;	(i)	$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} \, dx$;
(j)	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} \, dx$;	(k)	$\int \frac{\ln \tan x}{\sin 2x} \, dx$;	(l)	$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} \, dx$;
(m)	$\int \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx$;	(n)	$\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arccotx}}}{1 + x^2} \, dx$;	(o)	$\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1 + x)\sqrt{x}} \, dx$;
(p)	$\int \frac{(\sqrt{a^2 - x^2})^3}{x} \, dx$.				

Cevap: (a) $\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + c$;
(b) $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$;
(c) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln \mid \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \mid + c$;
(d) $-\frac{x}{4}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + c$;
(e) $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(1 + \sqrt[4]{x}) + c$; (f) $\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1 + x^2} + c$;
(g) $\ln \mid \ln\ln x \mid + c$; (h) $-\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x} + c$;
(i) $\frac{1}{5}\sqrt{\cos^5 x} - 2\sqrt{\cos x} + c$;
(j) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln \mid \sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x} \mid + c$; (k) $\frac{1}{4}\ln^2 \tan x + c$;
(l) $\frac{2}{3}\arcsin^{\frac{3}{2}} x + c$;(m) $-\frac{1}{6}\arccos^3 2x + c$; (n) $-\frac{3}{4}\text{arccot}^{\frac{4}{3}}\text{x} + \text{c}$;
(o) $(\arctan\sqrt{x})^2 + c$; (p) $-\frac{1}{a^4}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + c.$

(27) Aşağıdaki integralleri bulunuz.

(a) $\int \dfrac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$; (b) $\int \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x}\,dx$;
(c) $\int \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\,dx$; (d) $\int \dfrac{3x^2 + 5x + 12}{(x^2+3)(x^2+1)}\,dx$;
(e) $\int \dfrac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}dx$; (f) $\int \dfrac{(x-1)dx}{x^2(x-2)(x+1)^2}$;
(g) $\int \dfrac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$; (h) $\int \dfrac{dx}{x^3+1}$;
(i) $\int \dfrac{x^2}{1+x^4}dx$; (j) $\int \dfrac{dx}{x(3+x^6)^2}$;
(k) $\int \dfrac{dx}{(x^3+1)^2}$; (l) $\int \dfrac{x^2+1}{x^6+1}dx$;
(m) $\int \dfrac{x^2dx}{(x^2-3)^3}$; (n) $\int \dfrac{x^7}{(1+x^4)^2}dx.$

Cevap: (a) $\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \arctan x + \frac{1}{x-1} + \frac{1+2x}{1+x^2} + c$;
(b) $x^2 + \ln \mid \frac{x^2-1}{x} \mid + c$;
(c) $x + \frac{1}{6}\ln \mid x \mid - \frac{9}{2}\ln \mid x - 2 \mid + \frac{28}{3}\ln \mid x - 3 \mid + c$;
(d) $-\frac{5}{4}\ln(x^2+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4}\ln(x^2+1) + \frac{9}{2}\arctan x + c$;
(e) $\frac{1}{3} \mid \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2} \mid + c$;
(f) $-\frac{1}{2x} - \frac{5}{4}\ln \mid x \mid + \frac{1}{36}\ln \mid x - 2 \mid - \frac{2}{3(x+1)} + \frac{11}{9}\ln \mid x + 1 \mid + c$;
(g) $\frac{1}{x^2+2x+2} + \arctan(1+x) + c$;

(h) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$;
(i) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\mid\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\mid+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{1-x^2}{x\sqrt{2}}+c$;
(j) $-\frac{1}{54}\ln(\frac{3}{x^6}+1)+\frac{1}{18(3+x^6)}+c$;
(k) $\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$;
(l) $\frac{1}{3}\arctan x^3+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan^2(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}}+c$;
(m) $-\frac{1}{24}\frac{x}{x^2-3}-\frac{1}{4}\frac{x}{(x^2-3)^2}+\frac{1}{48\sqrt{3}}\ln\mid\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\mid+c$;
(n) $\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+\frac{1}{4}\frac{1}{1+x^4}+c$.

(28) $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki integraller için indirgeme formülleri bulunuz.

(a) $I_n=\int\cos^n xdx,\ n>2$; (b) $I_n=\int\cosh^n xdx,\ n>2$;
(c) $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x},\ n>1$; (d) $I_n=\int\frac{dx}{\sinh^n x},\ n>1$;
(e) $I_n=\int\tan^n xdx,\ n>1$; (f) $I_n=\int\cot^n xdx,\ n>1$;
(g) $I_n=\int\frac{dx}{(a\cos x+c)^n}$, $\mid a\mid\neq\mid c\mid, n\geq 1$;
(h) $I_n=\int\frac{\sin nx}{\sin x}dx,\ n\geq 2$.

Cevap: (a) $I_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2},\ n=3,4,\cdots$;
(b) $I_n=\frac{\sinh x\cosh^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2},\ n=3,4,\cdots$;
(c) $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2},\ n=3,4,\cdots$;
(d) $I_n=\frac{\cosh x}{(n-1)\sinh^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2},\ n=3,4,\cdots$;
(e) $I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2},\ n=2,3,4,\cdots$;
(f) $I_n=-\frac{1}{n-1}\cot^{n-1}x-I_{n-2},\ n=2,3,4,\cdots$;
(g) $I_n=\frac{1}{na}(x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{b}{2}(2n-1)I_{n-1}+c(n-1)I_{n-2})$, $n=3,4,\cdots$; (h) $I_n=\frac{2\sin(n-1)x}{n-1}+I_{n-2},\ n=2,3,4,\cdots$;

(29) Euler dönüşümleri yardımıyla aşağıdaki integralleri bulunuz.

(a) $\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$; (b) $\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2+4x+3}}$;
(c) $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$; (d) $\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$;
(e) $\int\frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$; (f) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Cevap:

(a) $\ln \mid 1-(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x})^2 \mid +c;$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln \mid \frac{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{3}} \mid +c;$
(c) $-2\arctan\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}+c;$ (d) $\frac{1+2x}{\sqrt{x^2+2x}}+c;$
(e) $5\sqrt{x^2+2x++5}-\ln \mid x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\mid +c;$
(f) $\frac{3}{2(2x+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x+\sqrt{x^2+x+1})^4}{|2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1|^3}+c.$

(30) Aşağıdaki integralleri yanlarında yazılı dönüşümler yardımıyla bulunuz.

(a) $\int \frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx, \quad x=\frac{t-1}{t+1};$
(b) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}, \quad x=\frac{1}{t};$
(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+x+2)^5}}, \quad t=(\sqrt{x^2+x+2})'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}};$
(d) $\int \frac{(5x+4)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}, \quad t=\frac{1}{2}(x^2+2x+5)'=x+1.$

Cevap: (a) $-2\arctan\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}}-4\sqrt{3}\ln\mid\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\mid +c,\ t=\frac{x+1}{1-x};$
(b) $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x|x|}+\frac{1}{2}\ln\frac{\mid |x|+x\sqrt{1+x^2}|}{x^2}+c;$
(c) $\frac{16}{49}[\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}-\frac{1}{24}(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}})^3]+c;$
(d) $5\sqrt{x^2+2x+5}-\ln\mid x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\mid +c.$

(31) $I_{n,m}=\int\sin^n x\cos^m x dx,\ n,m\in\mathbb{N}$ integralleri için aşağıdaki indirgeme formüllerinin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $I_{n,m}=-\frac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{n+m}+\frac{n-1}{n+m}I_{n-2,m}, \quad n=2,3,\cdots;$
(b) $I_{n,m}=\frac{\sin^{n+1}x\cos^{m-1}x}{n+m}+\frac{m-1}{n+m}I_{n,m-2}, \quad m=2,3,\cdots.$

(32) Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\int\frac{\cos^m x}{\sin^n x}dx=-\frac{\cos^{m+1}x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-m-2}{n-1}\int\frac{\cos^m x}{\sin^{n-2}x}dx,\ m\in\mathbb{N}, n=2,3,\cdots$
(b) $\int\frac{\cos^m x}{\sin^n x}dx=\frac{\cos^{m-1}x}{(m-n)\sin^{n-1}x}+\frac{m-1}{m-n}\int\frac{\cos^{m-2}x}{\sin^n x}dx, \quad n\in\mathbb{N},$
$m=2,3,\cdots,\ n\neq m.$

(33) Aşağıdaki integralleri bulunuz.

(a) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$; (b) $\int \cos 2x \cos 4x dx$;
(c) $\int \cos x \cos 2x \cos 5x dx$; (d) $\int \dfrac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$;
(e) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+\cos x}}$; (f) $\int \dfrac{dx}{3 + 5\cos x}$;
(g) $\int \dfrac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)}$; (h) $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 1}dx$;
(i) $\int \dfrac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$; (j) $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$;
(k) $\int \dfrac{\cos^5 x}{\sin^2 x}dx$; (l) $\int \dfrac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos x}}dx$;
(m) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

Cevap: (a) $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^2 2x}{48} + c$;(b) $-\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + c$;
(c) $\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 8x + c$; (d) $\ln \mid \frac{\tan\frac{x}{2}-5}{\tan\frac{x}{2}-3} \mid + c$;
(e) $-\sqrt{2}\ln \mid \tan\frac{\pi - x}{4} \mid + c$; (f) $\frac{1}{4}\ln \mid \frac{\tan\frac{x}{2}+2}{\tan\frac{x}{2}-2} \mid + c$;
(g) $\frac{1}{4}\tan^4\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln \mid \tan\frac{x}{2} \mid + c$; (h) $\cos x - 2\arctan(\cos x) + c$;
(i) $\frac{1}{\sqrt{14}}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{7}\tan x) + c$;
(j) $\frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{3}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2}\cot^2 x + 3\ln \mid \tan x \mid + c$;
(k) $-\frac{\cos^4 x}{\sin x} + \frac{4}{3}\sin^3 x - 4\sin x + c$; (l) $\frac{5}{14}\cos^{\frac{14}{5}} x - \frac{5}{4}\cos^{\frac{4}{5}} + c$;
(m) $4\sqrt[4]{\tan x} + c$.

(34) Aşağıdaki integralleri bulunuz.

(a) $\int \frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x+\sqrt[3]{x^4}}dx$; (b) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$;
(c) $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$; (d) $\int \frac{xdx}{(x^2+2x+2)\sqrt{4x^2+4x+3}}$;
(e) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$; (f) $\int \frac{xdx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$;
(g) $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$; (h) $\int e^{x+e^x}dx$;
(i) $\int \frac{x\ln|x|}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}dx$; (j) $\arcsin^3(x/3)dx$;
(k) $\int \frac{\arcsin(\tan x)}{\cos^2 x}dx$; (l) $\int \sinh x \arctan(\sinh x)dx$;
(m) $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$; (n) $\int (\frac{x+a}{x+b})^n dx$;
(o) $\int \sinh ax \cosh bx dx,\ a^2 + b^2 \neq 0$;
(p) $\int x^{a-1}\ln^{b-1} x(a\ln x + b)dx$.

Cevap: (a) $6\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-6\arctan\sqrt[6]{x}+c$;

(b) $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+c$;

(c) $\frac{2x^2+x+7}{6}\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+c$;

(d) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{\sqrt{4x^2+4x+3}}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{35}}\ln\frac{\sqrt{7(4x^2+4x+3)}-\sqrt{5}(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+2}}+c$;

(e) $\frac{1}{4}\ln\frac{t^2-2t+1}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+c,\ t=\sqrt[3]{x^2+1}$;

(f) $-\frac{t}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{10}+c,\ t=\sqrt{1-x^{-4}}$; (g) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}-\frac{\sqrt{1-x^4}}{4x^4}+c$;

(h) $e^{e^x}+c$; (i) $\frac{\ln|x|}{\sqrt{x^2-1}}+\arcsin\frac{1}{x}+c$;

(j) $x\arcsin^3(x/3)+3\sqrt{9-x^2}(\arcsin^2(x/3)-2)-6x\arcsin(x/3)+c$;

(k) $\tan x\arcsin(\tan x)+\sqrt{1-\tan^2 x}+c$;

(l) $\cosh x\arctan(\sinh x)-x+c$; (m) $\frac{(x+1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+c$;

(n) $x+(a-b)[n\ln\mid x+b\mid-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\binom{n}{k-1}(\frac{a-b}{x+b})^k]+c$;

(o) $\begin{cases}\frac{\cosh(a+b)x}{2(a+b)}+\frac{\cosh(a-b)x}{2(a-b)}+c, & a^2\neq b^2\text{ ise},\\ \frac{\cosh 2bx}{4b}+c, & a=b\text{ ise},\\ -\frac{\cos 2bx}{4b}+c, & a=-b\text{ ise}\end{cases}$ (p) $x^a\ln^b x+c$.